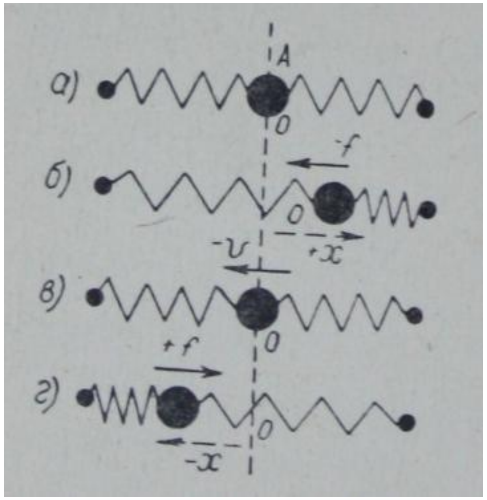
Гармониялық тербеліс.

Гук заңын қанағаттандыратын серпімді деформациялар кезінде, тепе-теңдік қалыпқа қарай бағытталған және деформацияға пропорционал күш пайда болады. Осындай күштің әсерінен пайда болатын қозғалыс сипатын қарастыралық.

Бір А жүгі екі пружинаның арасына қысылған делік. Екі пружинаның да созылуы бірдей болып, жүк О тепе-теңдік қалпында тұр (1-сурет). Жүкті тепе-тендік қалыпта шығарып, оң жаққа карай $+x$ кесіндісіне тең аралыққа жылжытайық (1 *б* сурет, мұнда солдан оңға қарай салынған кесінділерді оң кесінді деп есептейміз). Бұл кезде оң жақтағы пружина сығылады да, сол жақтағы пружина созылады және жүкке — f күші әсер етеді, бұл күш О тепе-теңдік қалыпқа қарай бағытталады, x ауытқудың шамасы неғұрлым үлкен болса, бұл күштің сан мәні де соғұрлым көп болады. Осы күштің әсерінен А жүгі тепе теңдік қалыпқа қарай қозғалады және оның жылдамдығы арта береді. Жүк қайтадан тепе-теңдік қалыпқа келгенде (*в* – сурет) бұған әсер етуші күш нольге тең болады. Бірақ жүктің әлі де — υ жылдамдық қоры болады, сондықтан ол тепе-тендік қалыптан өтіп, сол жаққа қарай қозғала береді. Осы кезде сол жақтағы пружина сығылады, оң жақтағы созылады да, жүкке оң жаққа – тепе- теңдік қалыпқа қарай бағытталған +f күші әсер ете бастайды. Бұл күш жүк тоқтағанша оны кейін тартады, осыдан кейін жүк қайтадан тепе-теңдік қалыпқа қарай қозғалады. Сөйтіп тепе-теңдік қалыптың маңында А жүгі тербелмелі қозғалысқа түседі.



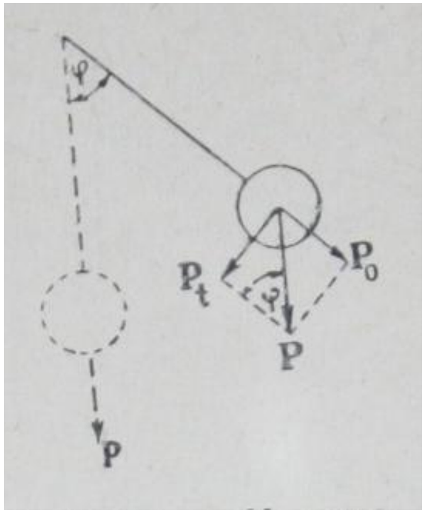
1-сурет

Тербелмелі қозғалысқа жазық маятниктің қозғалысы да мысал бола алады (2-сурет). Егер маятниктің жібі вертикаль тұрса, онда маятниктің жүгіне түсірілген P ауырлық күшін жіптің керілісі теңгеріп тұрады.

Егер маятникті тепе-теңдік қалыптан бір φ бұрышына бұратын болсақ, онда жіптің реакциясы P ауырлық күшінің тек бір бөлігін, атап айтқанда, жіпке параллель P_n құраушысын ғана теңгереді. Сонда оның, жіпке перпендикуляр, маятниктің тепе-теңдік қалпына қарай бағытталған сан мәні P sinφ болатын P_t құраушысы теңгерілмей калады. Егер φ бұрышы кішкене болса, онда синустың орнына бұрыштың өзін алуға болады да, шамамен P_t мен P_φ тең болады. Мұнда маятник жүгінің тепе-теңдік қалыптан ауытқу шамасы φ бұрышымен анықталады. φ бұрышы кішкене болғанда, маятник жүгін тепе-теңдік қалыпқа қайтарушы күш φ бұрышына пропорционал болады.

Осы күштің әсерінен маятник тепе-теңдік қалыптың маңында тербеліп қозғалады. Бұл жағдайда қозғалыс серпімділік күшімен анықталмайды, ол тепе-теңдік қалыпқа қарай бағытталған және φ кішкене болғанда маятниктің тепе-теңдік қалыптан ауытқуына пропорционал болатын ауырлық күшінің P_t құраушысымен анықталады. Сонымен, бұл күш өзінің сипаты жағынан алғанда серпімді күшке ұқсас болады. Бұл күштің әсерінен туатын тербе-лістер, φ бұрышы кішкене болғанда, қозғалыс сипаты жағынан серпімді күштің әсерінен туатын тербелістермен бірдей болады.

Өзінің табиғаты жағынан серпімді емес, бірақ ауытқуға тәуелділігі жағынан серпімді күшке ұқсас болып келген күштер *квази-серпімді* күштер деп аталады.



2-сурет

Жоғарыда келтірілген мысалдар серпімді немесе квазисерпімді күштердің әсерінен тербелмелі қозғалыс туатындығын көрсетеді. Тербеліс процесін толығырақ қарастыралық.

Массасы m, тепе-теңдік қалыптан ауытқуы x болып келген материялық нүктенің орнын анықтайық, тепе-теңдік қалыпта x=0 болады. Серпімді (не квази-серпімді) күшке тән қасиет, ол күштің x ауытқуға пропорционал және тепе-теңдік қалыпқа қарай бағытталуы болады, сондықтан оны былай жазуға болады:

$$f = -kx. \tag{1}$$

Мұндағы минус таңбасы күштің x ауытқуына қарама-қарсы бағытталғандығын көрсетеді; мысалы, нүкте жоғары қарай ауытқығанда күш төмен қарай әсер етеді, төмен қарай ауыткығанда күш жоғары қарай әсер етеді т. с. с. k коэффициенті оң шама болады.

Ньютонның екінші заңы бойынша:

$$mw = f = -kx, \tag{2}$$

мұндағы w - қарастырылып отырған материялык нүктенің үдеуі.

w үдеу ауытқудың уақыт бойынша алынған екінші туындысына тең, яғни $w = \frac{d^2x}{dt^2}$; уақыт бойынша алынған екінші туындыны, туынды алынып отырған шаманың төбесіне екі нүкте қойсақ, қысқаша былай жазады: $w = \ddot{x}$. Үдеудің осы мәнін (2) теңдікке қойсақ, мынау шығады:

$$m\ddot{x} = -kx \tag{3}$$

Немесе

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x. \tag{3a}$$

m мен k екеуі де оң шама болғандықтан, олардың қатынасы бір ω шамасының квадратына теңестіруге, яғни былай белгілеуге болады:

$$\frac{k}{m} = \omega^2. \tag{4}$$

Мұндағы ω шамасы төменде айтылатын себептер бойынша тербелістің *дөңгелектік* (немесе *циклдік) жиілігі* деп аталады.

Енді (3а) теңдеуді мына түрде жазуға болады:

$$\ddot{x} = -\omega^2 x. \tag{5}$$

Біздің ендігі міндетіміз нүктенің қозғалысын анықтау болады. Ол жөнінде бізге мынау белгілі: бұл нүктенің үдеуі (5) формула бойынша, тепе-теңдік қалыптан *x* ауытқуына пропорционал және ол тепе-теңдік қалыпқа қарай бағытталған. Егер нүктенің орны уақыттың функциясы ретінде мәлім болса, онда нүктенің қозғалысы да белгілі болады. Бұл жағдайда *x* ауытқуды *t* уақытты функциясы ретінде анықтау керек. Сонымен, (5) теңдеуді қанағаттандыра алатындай *x* пен *t*-нің арасындағы байланысты табуымыз керек. Бұл байланыс мынадай теңдеумен берілетіндігін тексеру оңай:

$$x = a\cos\left(\omega t + \alpha\right). \qquad (6)$$

Мұндағы a мен α — кез келген тұрақты шамалар, бұларды бастапқы шарттар бойынша анықтауға болады. Шынында, *x*-тің уақыт бойынша алынған екінші туындысын алсақ, онда *x*-тің мәні (5) теңдеуді тепе-теңдікке айналдыратындығын көреміз. Мұндағы a көбейткіші — *амплитуда*, аргумент $\omega t+a$ — фаза, α тұрақтысы — тербелістің бастапқы фазасы деп аталады. Дәл осылайша мынадай теңдеуді алуымызға болады.

$$x = a\sin\left(\omega t + \alpha\right), \qquad (7)$$

сонда тұракты α шамасын анықтағанымызда оның әрбір дербес жағдайдағы мәні (6) теңдеу бойынша анықталған мәнінен өзгеше болар еді. Тұрақты α шамасының осы өзгеше мәнін алғанда (7) теңдеудегі синустың берілген әрбір уақыт кезеңіндегі сан мәні (6) теңдеудегі косинустың сан мәніне тең болар еді, яғни (6) және (7) теңдеулермен өрнектелген қозғалыстар барабар болар еді.

(6) және (7) теңдеулер *гармониялық тербелмелі қозғалыс теңдеулері* деп аталады. Енді осы теңдеулерді зерттейік.

Гармониялық тербелмелі қозғалыстың негізгі қасиеті — оның периодтылығы. Оңай болу үшін бастапқы фаза $\alpha = 0$ деп санайық, сонда:

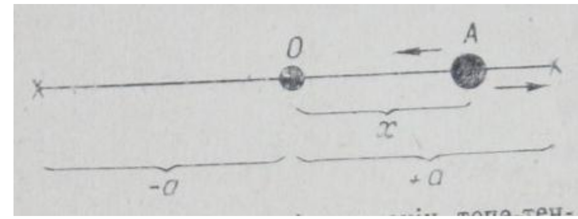
$$x = acos\omega t. \quad (6a)$$

t=0 болғанда, $cos\omega t = +1$ болады, сонда $x = +a$.Ауытқудың оң мәндерін тепе-теңдіктің оң жағына, теріс мәндерін сол жағына салайық (3-сурет)

Сонда гармониялық тербелмелі қозғалыстағы А нүктесінің $t = 0$ уақыт кезеңінде тепе-теңдік қа- лыптан оң жаққа қарай ауытқуы a кесіндісіне тең болады. Бұл осы нүктенің оң жаққа қарай мүмкіндігі бар максимум ауытқуы болады. Өйткені $cos\omega t$-нің мәні +1-ден артық бола алмайды. Уақыт t артқан сайын $cos\omega t$-нің мәні кеми береді — нүкте О тепе-теңдік қалыпқа жақындап, сол жаққа қарай қозғалады. $\omega t = \frac{\pi}{2}$ шарты бойынша анықталатын уақыт кезеңінде, яғни $t = \frac{\pi}{2\omega}$ болғанда, нүкте О тепе-теңдік қалыпта болады. Уақыт бұдан ары артқанда косинустың мәні теріс болады да, А нүктесі тепе-теңдік қалыптан сол жаққа қарай ауытқиды. $t = \frac{\pi}{\omega}$ болған кезде косинустың мәні - 1 болады, сонда $x = -a$, яғни нүкте сол жақтағы ең шеткі орнына келеді. Осыдан кейін ол оң жаққа қарай қозғала бастайды да, екінші рет О тепе-теңдік қалыпты басып өтіп, $t = T = \frac{2\pi}{\omega}$ болған кезде қайтадан оң жақтағы ең шеткі орнына келеді. Осыдан кейін қозғалыс түгелімен қайталай бастайды. Сонымен, уақыт өткен соң нүкте алғашқы орнына қайта оралып келеді (8). Осы T

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (8)$$

уақыт тербеліс периоды болып табылады. Бір периодқа (T-ға) тең уақыт ішінде тербелген А денесі жолының әрбір нүктесін (ең зор ауытқуларға $x = \pm a$ сәйкес келетін нүктелерден басқаларын) екі рет басып өтеді: сонда бірінші жолы — бір бағытта қозғалады да, екінші жолы оған қарама-қарсы бағытта қозғалады. $\omega = \frac{2\pi}{T}$ шамасы 2π-ге тең уақыт бірлігі ішіндегі тербеліс санын көрсетеді. *Амплитуда* деп аталатын a шамасы тербеліс нүктенің тепе-теңдік қалыптан барынша ең үлкен ауытқуын көрсетеді.



3-сурет

$\alpha \neq 0$ болса, t=0 болған бастапқы кездегі A нүктесі $x = acos$ мәнімен анықталатын орында болады. Осы нүктеден бастап период ішінде болатын қозғалыстың барлық сипатын көруге болады. Демек, бастапқы фаза α тербелген нүктенің t=0 болатын бастапқы кездегі орнын анықтайды.

Циклдік ω жиілікпен қатар уақыт бірлігіндегі тербеліс санын көрсететін кәдімгі $\nu = \frac{1}{T}$ жиілікті де қарастыруға болады. Осы ν, ω , T шамаларын салыстыра отырып, олардың арасында мынадай байланыс бар екенін көреміз:

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$$

ω -ның осы мәндерін (6) теңдеуге қойсақ, гармониялық тербелмелі қозғалыстың тағы мынадай екі өрнегі шығады:

$$x = \text{acos}(2\pi\nu t + \alpha),$$
$$x = \text{acos}(\frac{2\pi}{T}t + \alpha).$$

(4) формуланы және $T = \frac{2\pi}{\omega}$ қатынасты пайдаланып, периодтың мына шамасын табамыз:

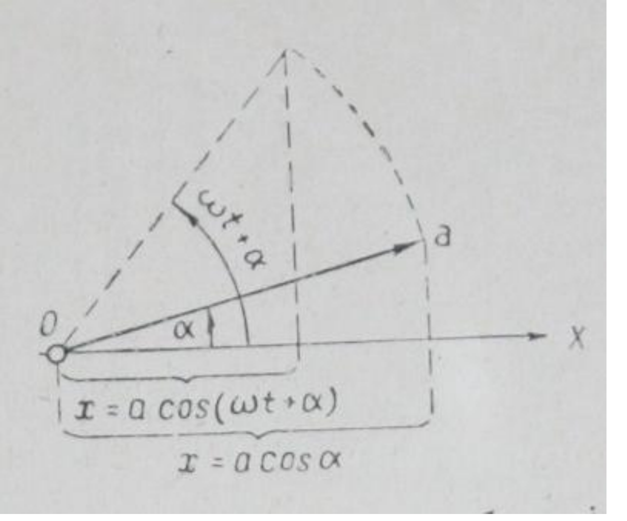
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Сөйтіп тербеліс периоды тек есептің динамикалық сипаттамаларына, яғни массасына және $к$ коэффициентке ғана байланысты болатынын көреміз. Тербеліс процесін тексеруге байланысты болып келген кей жағдайларда тербелісті амплитуда векторы арқылы геометриялық әдіспен көрсету тиімді болады.

Бұл әдістің мәні мынау. Бір ось алып, оны X осі деп аталық (4-сурет). Оның бойынан қалауымызша бір O нүктесін алайық. Осы нүктеден бастап, тербелістің бастапқы фазасына тең, бұрыш жасап, белгілі бір масштабпен вектор сызайық, сонда оның сан мәні a амплитудасына тең болсын. Суретке қарағанда a векторының X осіне түсірілген проекциясы, сол масштабпен алғанда нүктенің бастапкы ауытқуына $x = acos\alpha$-ға тең болатынын байкауға болады. Амплитуда векторын ω бұрыштық жылдамдықпен сағат тілінің бағытына қарсы айналдырамыз. Сонда ол вектор белгілі бір t уақыт кезеңінде X осімен $\omega t + \alpha$ бұрышын жасайды, оның X осіне түсірілген проекциясы мынаған тең болады:

$$x = \mathrm{a}\cos(\omega t + \alpha),$$

яғни бұл тербелген нүктенің t уақыт кезеңіндегі ауытқуы болады. Осыдан мынадай қорытынды жасай аламыз: гармониялық тербелмелі қозғалыс амплитуда векторы ұшының берілген оське түсірілген проекциясының қозғалысымен көрсетіледі. Ол амплитуда векторы осьтің кез келген нүктесінен бастап тербелістің бастапқы фазасына тең бұрыш жасай жүргізіледі және осы нүктеден бұрыштық ω жылдамдықпен айналады. Осыдан ω шамасының неліктен *дөңгелектік жиілік* деп аталатындығы айқындалады.



4-сурет

Гармониялық тербелмелі қозғалыстың жылдамдығы мен үдеуі.

Гармониялық тербелмелі қозғалыстағы А материялық нүктенің ауытқуы алдыңғы тақырыптағы (6) формула бойынша мынаған тең:

$$x = a\cos(\omega t + \alpha). \tag{1}$$

мұндағы a — тербеліс амплитудасы, ω — дөңгелектік жиілік, ал α — бастапқы фаза. Бұл нүктенің υ жылдамдығының сан шамасы x ауытқудың уақыт бойынша алынған туындысына тең, яғни $\upsilon = \frac{dx}{dt}$. Уақыт бойынша алынған бірінші туындыны осы туынды алынған шаманы өрнектейтін әріптің төбесіне нүкте қойып белгілейік. Енді осыны дифференциялдайтын болсақ, мынадай болады:

$$\upsilon = x = -a\omega\sin(\omega t + \alpha). \tag{2}$$

Жылдамдықтың уақыт бойынша алынған туындысын алатын болсақ, сонда А нүктесінің үдеуі шығады:

$$\omega = \frac{d\upsilon}{dt} = \ddot{x} = -a\omega^2\cos(\omega t + \alpha). \tag{3}$$

(2) және (3) формулалардағы ω-ның орнына период $T = \frac{2\pi}{\omega}$ -ны қоятын болсақ, мынау шығады:

$$\upsilon = -\frac{2\pi}{T}\mathrm{asin}\left(\frac{2\pi}{T}t + \alpha\right), \tag{2a}$$

$$\omega = -\frac{4\pi^2}{T^2}\mathrm{acos}\left(\frac{2\pi}{T}t + \alpha\right). \tag{3a}$$

Соңғы тендікті, (1) формулаға сүйене отырып, былай да жазуға болады:

$$\omega = -\frac{4\pi^2}{T^2}x.$$

Бұдан тағы да гармониялық тербелмелі қозғалыстың үдеуі x ауытқуға пропорционал және тепе-теңдік қалыпқа қарай бағытталған болып шығады.

Гармониялық тербелмелі қозғалыстағы нүктенің жылдамдығы мен үдеуі уақытқа байланысты периодты функциялар екендігін және периоды x ауытқудың T периодындай болатындығын (2а) және формулалардан байқауға болады.

1 кесте

T	x	Y	ω
0	$+a$	0	$-\frac{4\pi^2}{T^2}a$
$\frac{1}{4}T$	0	$-\frac{2\pi}{T}a$	0
$\frac{1}{2}T$	$-a$	0	$+\frac{4\pi^2}{T^2}a$
$\frac{3}{4}T$	0	$+\frac{2\pi}{T}a$	0
T	$+a$	0	$-\frac{4\pi^2}{T^2}a$

Бір тербеліс кезінде жылдамдық пен үдеудің осылай өзгеретінін тексереді. Ол үшін υ мен ω-нің әр түрлі уақыт кезеңіндегі мәндерінің таблицасын жасайық та, оларды осы уақыт аралықтарындағы x ауытқудың мәндерімен салыстырып көрелік. Жеңілдік үшін, бастапқы α фазаны тағы да нөлге тең деп алайық. Таблицадан мынаны көреміз: тербелуші А нүктесі тепе-теңдік қалыптан өткен кезде жылдамдық абсолют шамасы жағынан алғанда ең жоғары шегіне жетеді $|\upsilon| = \frac{2\pi}{T}$. Ауытқудың x=±a болатын шеткі мәндерінде жылдамдық нольге тең болады. Нүкте тепе-теңдік қалыптан өткен кезде (бұл кезде күш нольге тең), керісінше үдеу нольге тең болады да шеткі ауытқулар кезінде ол абсолют шамасы жағынан ең жоғарғы шегіне жетеді $|\omega| = \frac{4\pi^2}{T^2}a$.Үдеу әрқашан тепе-теңдік калыпта бағытталады.

Жоғарыда айтылғандай, тербеліс амплитудасы мен бастапқы фаза бастапқы шарттар арқылы анықталады. Бір бөлшектің бастапқы уақыт кезеңіндегі (t = 0) жылдамдығы υ_0 мен оның ауытқуы x_0 белгілі болсын дейік. Осы шарттардың t=0 мәнін (1) және (2) өрнектерге қоятын болсақ, мынау шығады:

$$x_0 = acosa, \upsilon_0 = -a\omega sina, \tag{4}$$

немесе

$$\frac{\upsilon_0}{\omega} = -asin\alpha. \tag{5}$$

(4) және (5) өрнектерді квадрат дәрежеге шығарып, мүшелеп қоссақ мынау шығады:

$$x_0^2 + \frac{\upsilon_0^2}{\omega^2} = a^2, a = \sqrt{x_0^2 + \frac{\upsilon_0^2}{\omega^2}} \tag{6}$$

(5) өрнекті x0 = a cos a-ға мүшелеп бөлсек, мынадай болады:

$$tg\alpha = -\frac{\upsilon^0}{\omega x_0} \tag{7}$$

(6) және (7) өрнектер бастапқы x_0 ауытқу мен бастапқы υ_0 жылдамдық арқылы анықталатын a амплитуда мен бастапқы α фазаның неге тең екенін көрсетеді. Демек, массасы берілген нүкте бір ғана серпімді күштің әсерінен, бастапқы шарттарға байланысты, амплитудасы әр түрлі және бастапқы фазалары әр түрлі тербелістер жасай алатынын, бұл кезде оның периоды сол қалпында қалатынын көруге болады.

Егер пружинаға ілулі тұрған жүкті тепе-теңдік қалыптан шығаратын болсақ, онда ол тербеле бастайды. Бұл тербелістердің амплитудасы қозғалыс басталар алдында пружина қаншалықты созылғандығына және жүкке қандай бастапқы жылдамдық берілгендігіне байланысты болады; тербеліс периоды, амплитуданың шамасына қарамастан, тек жүктің m массасы мен пружиканың k «қаттылығы» арқылы анықталады.

Жоғарыда айтылғандардан тербелістің бастапқы фазасы бастапқы уақыт кезеңін таңдап алуға байланысты болатындығын көреміз. Мысалы, бастапқы уақыт кезені ретінде нүктенің ауытқуы $x_0=+a$ болатын уақыт кезеңін алуға болады, сонда (6) қатыстан $\upsilon_0 = 0$ болатындығы және (7) қатыстан бастапқы фаза $\alpha = 0$ болатындығы шығады.

Гармониялық тербелмелі қозғалыстың энергиясы.

Массасы m материялық нүкте квази-серпімді

$$f = -kx$$

күштің әсерінен тербелетін болсын, мұндағы х— нүктенің тепе-теңдік қалыптан ауытқуы. Материялық нүкте тербелетіндіктен оның жылдамдығы болады, олай болса, кинетикалық энергиясы болады

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2. \quad (1)$$

Мұнымен қатар тербелуші нүктенің потенциялық энергиясы да болады. Түрлі орындарда нүкте жылдамдығының әр түрлі болатындығы оның кинетикалық энергиясының (E_k) уақытқа байланысты өзгеріп отыратындығын көрсетеді. Сондықтан оның потенциялық энергиясы да өзгеретіндігі бізге мәлім. Потенциялық энергия дененің орын ауыстыруы (х) үшін сыртқы күштердің істейтін жұмысының шамасымен өлшенеді. Серпімді жұмысының сан мәні $kx^2/2$-ге тең болатыны алдын айтылған. Сөйтіп, потенциялық энергия үшін мынадай өрнек шығады:

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2.$$

(1)және (2) формулалардағы υ мен х-тің орнына алдыңғы тақырыптағы (1) және (2) өрнектердегі мәндерін қойсақ, мынау шығады:

$$E_k = \frac{1}{2}ma^2\omega^2 sin^2(\omega t + \alpha), \quad (3)$$

$$E_p = \frac{1}{2}ka^2 cos^2(\omega t + \alpha). \quad (4)$$

Потенциялық энергияның мәні максимум (ең көп) болғанда, яғни шеткі мәндерінде, ауытқудың кинетикалық энергиясы нольге тең болады; тепе-теңдік қалыпты басып өткен кезде кинетикалық энергия максимумге (ең көп шамаға) жетеді. Бұл нүктеде потенциялық энергия нольге тең болады.

Тербелетін нүктенің Е толық энергиясы E_k кинетикалық және потенциялық энергиялардың қосындысына тең болады, яғни

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2} m a^2 \omega^2 sin^2(\omega t + \alpha) + \frac{1}{2} k a^2 cos^2(\omega t + \alpha).$$

$m\omega^2 = k$ деп белгіленетін болғандықтан, толық энергияны мына түрде жазуға болады:

$$E = \frac{1}{2} k a^2 sin^2(\omega t + \alpha) + \frac{1}{2} k a^2 cos^2(\omega t + \alpha),$$

бұдан

$$E = \frac{1}{2} k a^2, \qquad (5)$$

яғни *Е толық энергия тербеліс амплитудасының квадратына және k серпімділік коэффициентіне пропорционал болады.*

$m\omega^2 = k = m\frac{4\pi^2}{T^2}$ теңдігін пайдаланып, (3) формуланы мына түрде де жазуға болады:

$$E = \frac{2\pi^2 m}{T^2} a^2. \qquad (6)$$

(3) және (4) формулалардан *толық энергия тербеліс кезінде тұрақты болатындығын көруге болады*, энергияның сақталу заң бойынша да осылай болуы керек.

Ең шеткі ауытқу кезінде барлық энергия потенциялық энергияға айналады, нүкте тепе-теңдік қалыптан өткен кезде барлық энергия кинетикалық энергияға айналады; тербелуші нүктенің басқа орындарының бәрінде энергияның екі түрі де болады. Тербелмелі қозғалыс кезіндегі энергияны графиктік түрде кескіндеу алдын айтылған болатын.

Осы айтылғандардан тербелмелі қозғалыс кезінде энергия барлық уақытта да потенциялық энергиядан кинетикалық энергияға және керісінше айналып отыратындығын көруге болады. Бұл кезде бір T период ішінде толық E энергия екі рет (тепе-теңдік қалыптан екі рет өткенде) толығымен кинетикалық E_k энергияға айналады және екі рет (екі шеткі ауытқуда) толығымен потенциялық E_p энергияға айналады. Енді энергияның біресе кинетикалық энергияға, біресе потенциялық энергияға айналатынын еске алып, энергияның «тербелісі» жөнінде айтуға болады. Осыдан эиергия «тербелісінің» T' периоды тербелмелі қозғалыстың T периодынан екі есе кем екенін көруге болады.